УДК 517.518.45

Условия, при которых преобразование типа Харди ограничено в пространствах Морри

Ныгметов Нурболат Бакытулы – магистрант кафедра Математики Механо-математического факультета Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Аннотация: В статье рассматриваются какие условия нужно наложить на вес w и последовательность $\{l_k\}$, чтобы преобразование типа Харди $H(f,l)$ было ограниченным из L_q в $LM^{\lambda}_{p,\theta,w}$. Начало статьи содержит определения преобразованиям типа Харди и Беллмана. Также, статья содержит определения таких терминов, как Классические и Локальные пространства Морри.

Ключевые слова: Пространства Морри, преобразование типа Харди.

Abstract: The article considers what conditions should be imposed on the weight w and the sequence {l_k} so that the hardy type transformation H(f, l) is bounded from L_q to LM_(p,θ,w)^λ. The beginning of the article contains definitions of hardy and Bellman type transformations. The article also contains definitions of such terms as Classical and Local Morrie spaces.

Keywords: Morrie spaces, hardy type transformation.

Ортонормированную систему $\varphi := \{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
функций, определенных на отрезке [0,1], будем называть регулярной, если существует константа C, такая, что

1) Для любого отрезка е из [0.1] и $k \in \mathbb{N}$
верно соотношение

$$\left|\int_e \phi_k(x)dx\right| \le C\min\left(\mu e, \frac{1}{k}\right),$$

2) Для любого отрезка w (конечная арифметическая прогрессия с шагом 1) из $\mathbb{N}$
и $t \in (0,1]$
выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k\in w} \phi_k\right)^* \le C\min\left(|w|, \frac{1}{t}\right),$$

Где $\left(\sum_{k\in w} \phi_k(\cdot)\right)^*(t)$
– невозрастающая перестановка функции $\sum_{k\in w} \phi_k(x)$
, $|w|$
– количество элементов во множестве w.

Пусть $\Phi := \{\varphi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\Psi := \{\psi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ - регулярные системы, $I := \{I_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ - некоторая последовательность конечных подмножеств из $\mathbb{N}$.

J последовательность множеств $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $J_k := \{m : k \in I_m\}$.

К примеру, для $f \in L_1[0,1]$, $f := \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \psi_k(x)$ и последовательности $I := \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ определим преобразования $H(f, I; \Phi; \Psi)$ и $B(f, I; \Phi; \Psi)$ следующим образом

$$H(f, I; \Phi; \Psi) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|J_k|} \left(\sum_{m\in J_k} a_m \right) \varphi_k(x) \qquad (1)$$

$$B(f,I;\ \Phi;\ \Psi)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{m\in I_k}\frac{a_m}{|I_k|}\right)\varphi_k(x) \qquad (2)$$

[illegible] типа Харди и Беллмана, отвечающими $I:=\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

и системам функций $\Phi:=\{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$

, $\Psi:=\{\psi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$

. В случае $I_k:=\{1,2,3,\ldots,k\}, k\in\mathbb{N}$

, а системы $\Phi:=\Psi:=\{\cos kx\}_k$

[illegible] Харди

Классические пространства Морри

Определение:

«Пусть $0<p<\infty$

и $0<\lambda<\frac{n}{p}$

, тогда $f\in M_p^\lambda$

, если $f\in M_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$

и конечна следующая норма

$$\|f\|_{M_p^\lambda}:=\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{r>0}r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(x,r))}<\infty,$$

где $B(x,r)$

– открытый шар в $\mathbb{R}^n$

радиуса $r>0$

с центром в точке $x\in\mathbb{R}^n$.

Локальные пространства типа Морри

Определение:

Пусть $\lambda > 0$ и $0 < p, q < \infty$. Рассмотрим локальные пространства типа Морри $LM_{p,q}^{\lambda}$, которые определяются как пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ для которых

$$\|f\|_{LM_{p,q}^{\lambda}} := \left(\int_0^{\infty} \left(r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(0,r))} \right)^q \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

С обычной модификацией для $q = \infty$

Теорема:

Пусть $1 < \theta < \infty$, $2 < p \leq q < \infty$, $w > 0$ и $\int_0^{\infty} \left(w(t) t^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\theta} dt < \infty$

Тогда преобразование Харди $H(f,x)$

ограничены из $L_{r,q}$

в $LM^{\lambda}_{p,\theta,w}$

, то есть $\exists C$

, что $\|H(f,x)\|_{LM_{p,\theta,w}} \le C\|f\|_{L_{r,q}}$

Список литературы

1. Tleukhanova, Nazerke Tulekovna. "On Hardy and Bellman transformations for orthogonal Fourier series." Mathematical Notes 2001. 70.3. С. 577-579.
2. Нурсултанов Е.Д., Чигамбаева Д.К. Интерполяция пространств типа Морри. 2018. С. 5-6.

{social}